مسئلهٔ نمونه ۷-۲

در شکل ۷-۴الف، دو جاسوس صنعتی نشان داده شده‌اند که گاوصندوقی به جرم ۲۲۵ kg را، که در ابتدا روی کف زمین به حال سکون بوده است، به حالت لغزان درآورده‌اند و آن را به اندازهٔ $d = ۸٫۵۰\,m$ مستقیماً به طرف کامیون‌شان جابه‌جا کرده‌اند. جاسوس ۱ نیروی فشاری $\vec{F}_۱$ به بزرگی ۱۲٫۰ N را در جهت رو به پایین و با زاویهٔ ۳۰٫۰° نسبت به افق بر صندوق وارد می‌کند؛ جاسوس ۲ نیروی کششی $\vec{F}_۲$ به بزرگی ۱۰٫۰ N را در جهت رو به بالا و با زاویهٔ ۴۰٫۰° نسبت به افق بر صندوق وارد می‌آورد. فرض کنید جهت و مقدار نیروهای وارد شده بر صندوق در طول جابه‌جایی تغییر نمی‌کند، و تماس بین صندوق و کف زمین هم بدون اصطکاک است.

(الف) کار خالصی که نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ در خلال جابه‌جایی $\vec{d}$ روی صندوق انجام می‌دهند، چقدر است؟

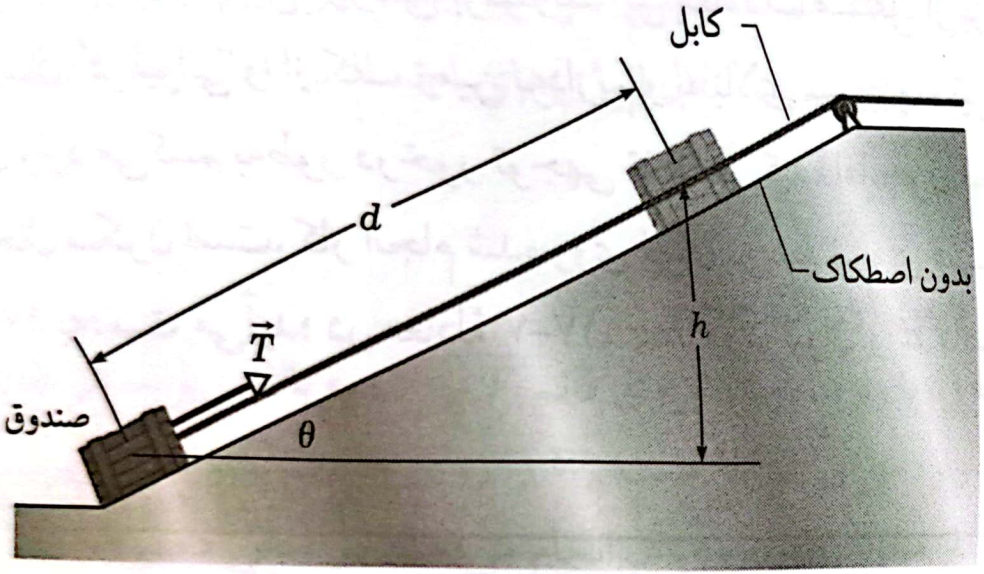
نکته‌ها

(۱) کار خالص W که توسط این دو نیرو روی صندوق انجام می‌شود برابر است با مجموع کارهایی که این نیروها به‌طور جداگانه انجام می‌دهند. (۲) چون می‌توانیم گاوصندوق را به‌صورت ذره در نظر بگیریم و نیروها هم از لحاظ جهت و مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شوند، برای محاسبهٔ کارهای انجام شده می‌توانیم از هر دو معادلهٔ ۷-۷ ($W = Fd\cos\phi$) و ۷-۸ ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$) استفاده کنیم. با توجه به معلوم بودن مقدار و جهت نیروها، معادلهٔ ۷-۷ را برمی‌گزینیم.

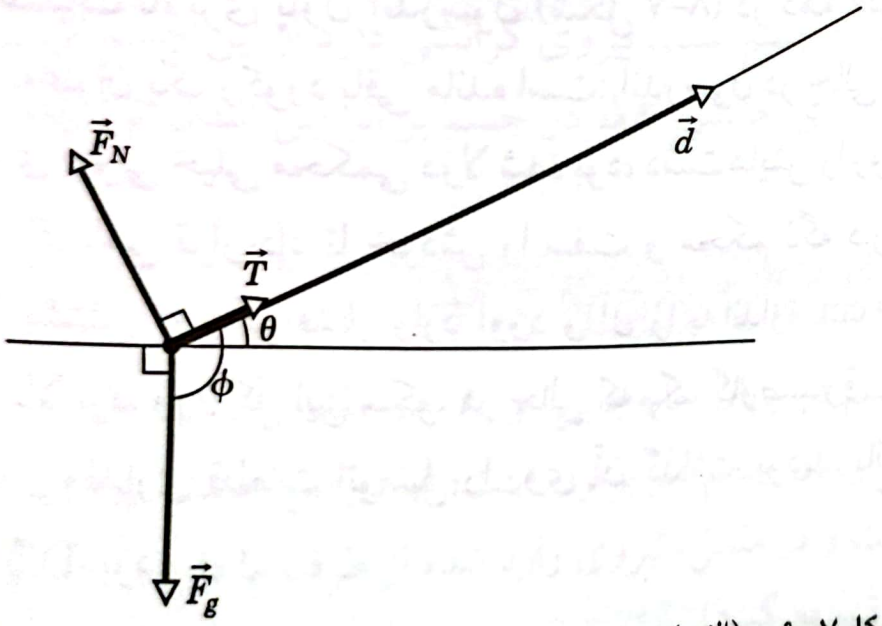
مسئلهٔ نمونه ۷-۵

صندوقی به جرم ۱۵٫۰ kg را، به‌کمک یک رشتهٔ کابل، از سطح شیبدار بدون اصطکاکی بالا می‌بریم (شکل ۷-۹الف). طول مسیر $d = ۵٫۷۰\,\mathrm{m}$ و ارتفاع سطح شیبدار $h = ۲٫۵۰\,\mathrm{m}$ است.

(الف) کاری که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ حین بالا بردن صندوق روی آن انجام می‌دهد، چقدر است؟



(الف)



(ب)

شکل ۷-۹ (الف) صندوق ...

نکته صندوق را مانند یک ذره در نظر می‌گیریم و، برای تعیین کاری که $\vec{F}_g$ انجام می‌دهد، از معادلهٔ ۷-۱۲ ($W_g = mgd\cos\phi$) استفاده می‌کنیم.

محاسبات: زاویهٔ ϕ بین جهت‌های $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ در این مسئله داده نشده است. اما با توجه به نمودار جسم آزاد، در شکل ۷-۹ب، معلوم می‌شود $\phi = ۹۰° + \theta$ که در آن θ زاویهٔ (مجهول) سطح شیبدار است. در این صورت، طبق معادلهٔ ۷-۱۲ داریم

$$W_g = mgd\cos(\theta + ۹۰°) = -mgd\sin\theta \qquad (۷-۱۸)$$

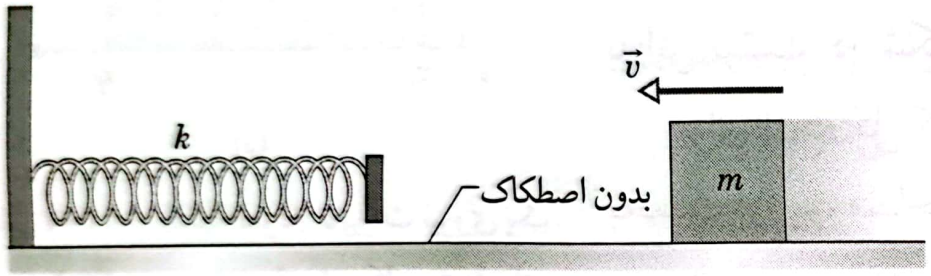
که در آن برای ساده‌سازی عبارت از یک اتحاد مثلثاتی استفاده شده

بدست می‌آید

فنر در جابه‌جایی جعبه از $x = ۰$ به $x_f = -۱۲\,\text{mm}$ است.

مسئلهٔ نمونه ۷-۸

در شکل ۷-۱۲، یک قوطی زیره به جرم $m = ۰٫۴۰\,\text{kg}$ با سرعت $v = ۰٫۵۰\,\text{m/s}$ در روی میزی بدون اصطکاک در حال سُر خوردن است. سپس، این قوطی در برخورد با فنری به ثابت فنر $k = ۷۵۰\,\text{N/m}$ آن را فشرده می‌کند. در حالتی که فنر به‌طور لحظه‌ای قوطی را متوقف می‌کند، میزان فشردگی فنر (d) چقدر است؟



شکل ۷-۱۲ یک قوطی به جرم m با سرعت $\vec{v}$ به طرف فنری با ثابت فنر k در حرکت است.

نکته‌ها

۱. کار W_s که نیروی فنر روی قوطی انجام می‌دهد به فاصلهٔ d لازم در معادلهٔ ۷-۲۶ ($W_s = -\frac{۱}{۲}kx^۲$)، که در آن d به‌جای x قرار می‌گیرد، بستگی دارد.

۲. کار W_s، از طریق معادلهٔ ۷-۱۰ ($K_f - K_i = W$)، به انرژی جنبشی قوطی نیز بستگی دارد.

۳. انرژی جنبشی قوطی در آغاز برابر $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$، و در توقف لحظه‌ای‌اش برابر صفر است.

محاسبات: با استفاده از دو نکتهٔ نخست، قضیهٔ کار-انرژی جنبشی را برای قوطی چنین می‌نویسیم

$$K_f - K_i = -\frac{۱}{۲}kd^۲$$

جعبه‌ای که محتوی بادام سوختهٔ شور است، به همان ترتیبی که در شکل ۷-۱۱الف نشان داده شده است، به‌طور متصل به انتهای آزاد یک فنر روی میزی بدون اصطکاک قرار دارد. برای نگه داشتن جعبه در فاصلهٔ $x_1 = 12\,mm$، باید نیرویی به بزرگی $4.9\,N$ را در جهت رو به راست بر آن وارد کنیم.

الف) اگر جعبه را از $x_0 = 0$ به $x_2 = 17\,mm$ به طرف راست بکشیم، نیروی فنر چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟

نکته وقتی جعبه از مکانی به مکان دیگر جابه‌جا می‌شود، نیروی فنر طبق معادلهٔ ۷-۲۵ یا معادلهٔ ۷-۲۶ روی آن کار انجام می‌دهد.

محاسبات: می‌دانیم که موقعیت‌های مکانی ابتدایی و انتهایی به‌ترتیب $x_i = 0$ و $x_f = 17\,mm$ اند، ولی ثابت فنر k در دست نیست. شاید می‌توانیم k را به‌کمک معادلهٔ ۷-۲۱ (قانون هوک) به‌دست آوریم، اما برای این کار باید این واقعیت را در نظر گرفت: در حالتی که جعبه در $x_1 = 12\,mm$ نگه داشته می‌شود، نیروی فنر باید با نیروی وارد شده بر فنر در حال تعادل باشد (طبق قانون دوم نیوتون). از این‌رو، نیروی فنر F_x در این حالت باید برابر $-4.9\,N$ (و در جهت رو به چپ در شکل ۷-۱۱ب) باشد؛ درنتیجه از معادلهٔ ۷-۲۱ ($F_x = -kx$) به‌دست می‌آید

$$k = -\frac{F_x}{x_1} = -\frac{-4.9\,N}{12\times10^{-3}\,m} = 408\,N/m$$

اکنون برای حالتی که جعبه در $x_2 = 17\,mm$ قرار می‌گیرد، طبق معادلهٔ ۷-۲۶ داریم

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx_2^2 = -\tfrac{1}{2}(408\,N/m)(17\times10^{-3}\,m)^2$$
$$= -0.059\,J \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) سپس، جعبه به طرف چپ جابه‌جا می‌شود و به موقعیت $x_3 = -12\,mm$ می‌رسد. نیروی فنر در حین این جابه‌جایی چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟ برای علامت این کار چه توضیحی دارید؟

محاسبه: در این‌جا $x_i = +17\,mm$ و $x_f = -12\,mm$ است، و از معادلهٔ ۷-۲۵ به‌دست می‌آید

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 = \tfrac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(408\,N/m)[(17\times10^{-3}\,m)^2 - (-12\times10^{-3}\,m)^2]$$
$$= 0.030\,J = 30\,mJ \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت این مقدار کار انجام شده روی جعبه، توسط نیروی فنر، به این دلیل مثبت است که کار مثبت انجام شده در جابه‌جایی جعبه از $x_i = +17\,mm$ به موقعیت فنر واهلیده ($x = 0$) بیشتر از کار منفی فنر در جابه‌جایی جعبه از $x = 0$ به $x_f = -12\,mm$ است.

مسئلهٔ نمونه ۱۰-۷

نیروی $\vec{F} = (3x^2\,\mathrm{N})\hat{i} + (4\,\mathrm{N})\hat{j}$، که در آن x برحسب متر است، بر ذره‌ای وارد می‌شود و فقط انرژی جنبشی آن را تغییر می‌دهد. هنگامی که ذره از نقطه‌ای با مختصات $(2\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$ به نقطه‌ای با مختصات $(3\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ جابه‌جا می‌شود، چقدر کار روی آن انجام

می‌شود؟ آیا سرعت حرکت ذره در طی این جابه‌جایی افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

نکته چون مؤلفهٔ x این نیرو به مقدار x بستگی دارد، این نیرو یک نیروی متغیر است. پس، برای تعیین کار انجام شده نمی‌توانیم از معادلات ۷-۷ و ۷-۸ بهره‌گیری کنیم. به‌جای آن، باید روش انتگرال‌گیری نیرو در معادلهٔ ۷-۳۶ را به‌کار بگیریم.

محاسبه: در این‌جا دو انتگرال نیاز داریم که هر کدام از آن‌ها باید در امتداد یکی از محورهای مختصات باشد:

$$W = \int_{۲}^{۳} ۳x^{۲}\,dx + \int_{۳}^{۰} ۴\,dy = ۳\int_{۲}^{۳} x^{۲}\,dx + ۴\int_{۳}^{۰} dy$$

$$= ۳\left[\tfrac{۱}{۳}x^{۳}\right]_{۲}^{۳} + ۴\left[y\right]_{۳}^{۰} = \left[۳^{۳} - ۲^{۳}\right] + ۴\left[۰ - ۳\right]$$

$$= ۷{,}۰\ \mathrm{J}$$ (پاسخ)

معنی این نتیجهٔ مثبت این است که بر اثر نیروی $\vec{F}$ به ذره انرژی منتقل می‌شود. از این‌رو، انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد و، با توجه به این‌که $K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$ است، سرعت آن‌هم باید افزایش پیدا کند.

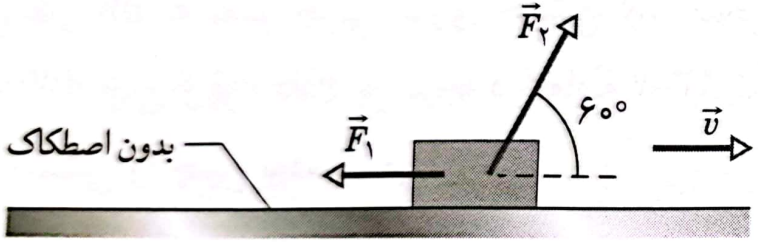
پدر است.

۵ پدر و پسری را در نظر بگیرید که با هم مسابقه گذاشته‌اند. جرم پسر نصف جرم پدر، و انرژی جنبشی پدر در ابتدا نصف پسر است. پدر با افزایش سرعت خود، به اندازهٔ ۱٫۰ m/s، انرژی جنبشی‌اش را با پسر مساوی می‌کند. سرعت اولیهٔ (الف) پدر و (ب) پسر را به‌دست آورید.

خودآزمایی ۳ قطعه‌ای را در نظر بگیرید که به دلیل ثابت ماندن انتهای طناب متصل به آن در مرکز یک دایره، حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. آیا توان ناشی از نیروی طناب که بر این قطعه وارد می‌شود، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟

مسئلهٔ نمونه ۷-۱۱

در شکل ۷-۱۶ نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ وارد بر جعبه، در حالی که این جعبه روی کف بدون اصطکاکی به طرف راست در حرکت است، نشان داده شده‌اند. نیروی $\vec{F}_1$ نیرویی افقی به بزرگی ۲٫۰ N است؛ نیروی $\vec{F}_2$ به بزرگی ۴٫۰ N در جهت ۶۰° بالاتر از کف بر جعبه وارد می‌شود. مقدار سرعت جعبه در لحظه‌ای خاص برابر ۳٫۰ m/s است. در این لحظه، توان مربوط به هر یک از نیروهای وارد بر جعبه و توان خالص این نیروها چقدر است؟



شکل ۷-۱۶ دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در حالی بر یک جعبه وارد می‌شوند که این جعبه روی سطح بدون اصطکاکی به طرف راست در حرکت است. سرعت حرکت جعبه $\vec{v}$ است.

بخش ۷-۴ کاری که نیروی گرانشی انجام می‌دهد

*۱۷ یک بالگرد (هلی‌کوپتر)، با استفاده از کابل، فضانوردی به جرم ۷۲ kg را به اندازهٔ ۱۵ m در راستای قائم از سطح دریا بالا می‌برد. شتاب بالا برده شدن فضانورد $g/۱۰$ است. کار انجام شده روی فضانورد توسط (الف) نیروی بالگرد و (ب) نیروی گرانشی چقدر است؟ درست در لحظهٔ رسیدن فضانورد به بالگرد، (ج) انرژی جنبشی و (د) سرعت حرکت او چقدر است؟

*۱۸ (الف) در سال ۱۹۷۵ سقف استادیوم دوچرخه‌سواری مونرآل، به

می‌شد؟
ارشناس
کشیدن
۱۰٫۰ m
سکون
سرعت

۲۸* در شکل ۷-۱۱، فرض کنید برای آن‌که بتوانیم قطعه را در $x = -۲٫۰\,cm$ ساکن نگه داریم باید نیرویی به بزرگی $۸۰\,N$ بر آن وارد کنیم. در حالی که همچنان بر قطعه نیرو وارد می‌کنیم، روی مجموعهٔ فنر-قطعه به اندازهٔ $+۴٫۰\,J$ کار انجام می‌دهیم تا آن‌که قطعه به‌آرامی مجدداً به حالت سکون برسد. در این حالت، مختصهٔ جدید قطعه چقدر است؟ (راهنمایی: این مسئله دو پاسخ دارد.)

۱۹ با استفاده از یک رشته طناب، قطعه‌ای به جرم M را که در ابتدا در حال سکون بوده است، با شتاب ثابت $g/۴$ در امتداد قائم به پایین می‌فرستیم. هنگامی که این قطعه به اندازهٔ d به پایین رفته است، کمیت‌های زیر چه مقادیری خواهند داشت (الف) کاری که نیروی طناب روی قطعه انجام داده است، (ب) کاری که نیروی گرانشی روی قطعه انجام داده است، (ج) انرژی جنبشی قطعه، و (د) سرعت حرکت قطعه؟

۴۰** یک قطعه به جرم ۱٫۵ kg که در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی به حال سکون قرار دارد، در امتداد محور x تحت تأثیر نیرویی افقی قرار می‌گیرد. نیروی وارد شده عبارت است از $\vec{F}(x) = (۲٫۵ - x^۲)\,\hat{i}$ N، که در آن x برحسب متر است. مکان اولیهٔ قطعه را هم در $x = ۰$ بگیرید. (الف) انرژی جنبشی قطعه هنگام گذار از $x = ۲٫۰$ m چقدر است؟ (ب) حداکثر انرژی جنبشی قطعه در فاصلهٔ میان $x = ۰$ و $x = ۲٫۰$ m چقدر است؟